25/11/2015

Jacobi $x^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right] \Leftrightarrow a_{ii} x_i^{(m+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} - \sum_{j=i+1} a_{ij}$

$x_j^{(m)}$

Gauss Seidel $x_i^{(m+1)} \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right] \Leftrightarrow a_{ii} x_i^{(m+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$

$x_j^{(m+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j$

για $i=1,2, \ldots, n$

Θεωρώ τον διαχωρισμό του A ως $A = D - L - U$ όπου

$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 \\ -a_{n1} & & 0 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & & & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

Jacobi $Dx^{(m+1)} = (L+U)x^{m} + b \Leftrightarrow x^{(m+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(m)} + D^{-1} b$

Gauß-Seidel $(D-L)x^{(m+1)} = Ux^{(m)} + b \Leftrightarrow x^{(m+1)} = (D-L)^{-1} U x^{(m)} + (D-L)^{-1} b$

Αυτές οι ειδικές περιπτώσεις της γενικής επαναληπτικής μεθόδου που βασίζεται στο διαχωρισμό $A = M - N$ όπου M αντιστρέψιμος πίνακας

$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b \Leftrightarrow x^{(m+1)} = M^{-1} N x^{(m)} + M^{-1} b \Leftrightarrow x^{(m+1)} = Gx^{(m)} + c$ όπου

$G = M^{-1} N \quad c = M^{-1} b$

Ο πίνακας G λέγεται επαναληπτικός πίνακας κ' σ' αυτόν οφείλεται η σύγκλιση ή η μη σύγκλιση της μεθόδου.

Αν συγκλίνει η μέθοδος θα συγκλίνει στο x τ.ω $x = Gx + c$ που είναι η λύση του συστήματος $Ax = b$ $\quad x = Gx + c \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow$

$(M-N)x = b \Leftrightarrow Ax+b$

σφάλμα $x^{(m+1)} - x = G(x^{(m)} - x) \Leftrightarrow \varepsilon^{(m+1)} = G\varepsilon^{(m)}$ επαγωγικά έχουμε

$\varepsilon^{(m)} = G^{m} \varepsilon^{(0)}$

Θέλουμε $\lim_{m\to\infty} \varepsilon^{(m)} = 0 \quad \forall\ \varepsilon^{(0)} = x^{(0)} - x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} G^m = 0 \Leftrightarrow$

$\lim_{m\to\infty} \| G^m \| = 0$ για οποιαδήποτε νόρμα

$$\varepsilon^{(m)} = G^m \varepsilon^{(0)} \Rightarrow \| \varepsilon^{(m)} \| = \| G^m \varepsilon^{(0)} \| \Rightarrow$$

$\| \varepsilon^{(m)} \| \le \| G^m \| \| \varepsilon^{(0)} \|$ για κάποια φυσική νόρμα $\|.\|$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω x η λύση του γραμμικού συστήματος $Ax=b$ τότε οι επόμενες προτάσεις ισοδυναμούν:

(i) Η επαν. μεθ. που βασίζεται στο διαχωρισμό $A = M - N$, Μ αντιστρέψιμος

(ii) $\rho(G) < 1$ (φασματική ακτίνα)

(iii) Υπάρχει φυσική νόρμα $\|.\|$ ώστε $\|G\| < 1$

(iv) $\lim_{m\to\infty} G^m = 0$

$$\rho(B) = \max \{ |\lambda_i| : \lambda_i \text{ ιδιοτιμή του } B \text{ δηλ. } Bx^{(i)} = \lambda_i x^{(i)} \text{ με } x^{(i)} \in \mathbb{C}^n - \{0\} \}$$

Έστω F, G επαναληπτικοί πίνακες για τη λύση του $Ax=b$. Αν $\rho(F) < \rho(G) < 1$ τότε η μέθοδος με επαν. πίνακα τον F συγκλίνει ταχύτερα από εκείνη με επαν. πίνακα τον G.

Για κάθε φυσική νόρμα ισχύει $\rho(G) \le \|G\|$: $Gx = \lambda x \Leftrightarrow \|Gx\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \le \|G\| \|x\|$

<u>Παράδειγμα</u> $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$

$$G_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\|G_J\|_1 = \|G_J\|_\infty = 1$, δεν βγαίνει συμπέρασμα για τη σύγκλιση.

Για να βρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του G_J

$$\det(G_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 1/4 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda \overset{+\frac{1}{4}\lambda}{=} -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \rho(G_J) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow$ συγκλίνει (όσο μικρότερη απ' την μονάδα τόσο πιο γρήγορα συγκλίνει)

$$G_{GS} = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 2 & & \\ -1 & 2 & \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

Για να βρω τον $(D-L)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 2 & & \\ -1 & 2 & \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}$

$$\left[(D-L)^{-1}\right]^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(D-L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Άρα έχουμε: $G_{GS} = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}$

$\|G_{GS}\| = \frac{3}{4} < 1$, άρα συγκλίνει

$$\det(G_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4-\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/8 & 1/4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left[\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)^2 - \frac{1}{16}\right] = -\lambda^2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho(G_{GS}) = \frac{1}{2} < 1$$

Παρατηρώ ότι $\rho(G_{GS}) = \rho(G_J)^2$. Αυτό σημαίνει ότι η Gauß-Seidel συγκλίνει με διπλάσια ταχύτητα από την Jacobi

$$\varepsilon^{(m)} = G^m \varepsilon^{(0)}$$

Παράδειγμα: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Να μελετηθούν ως προς τη σύγκλιση η Jacobi και G-S

Στη συνέχεια να γίνουν 4 επαναλήψεις της μεθόδου που συγκλίνει

$$G_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - G_J) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = +\lambda^3 + \cancel{4} - \cancel{4} + 4\lambda - 2\lambda - 2\lambda = \lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\rho(G_J) = 0$ συγκλίνει με άπειρη ταχύτητα.
Για κάποιο $k \leq n$ έχουμε $G^k = 0$ $\quad G_J^3 = 0$